1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ANÁLISIS 1

Final - 21/12/2010

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Probar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

b) Probar que existen las derivadas dobles cruzadas, pero que en $(0,0)$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

c) ¿Es f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?

d) ¿Es f una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$?

2. *a*) Sea $k > 0$, encontrar el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : xy = k\}.$$

b) Probar que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x, y > 0$ vale que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

3. Sean $a, b > 0$. Calcular $\iint_E |xy| dxdy$, donde E es la elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $a < b$. Probar que existe $M > 0$ tal que, para todo $x, y \in [a,b]$, se verifica

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq M\big|x - y\big|.$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(1,2) = 0$.

a) Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua tal que $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (1,2)$. Si $f(0,0) = -1$, probar que existe un punto p en la imagen de γ tal que $f(p) = -1/2$.

b) Probar que si f es de clase C^1 y $\nabla f(1,2) \neq (0,0)$, entonces existen infinitos puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(p) = 0$.

Justifique todas sus respuestas.